[Queff.] (Connexité) § 4.V.6 | Théorème de Runge (version faible) | leçons 203, 204, 243, 245, 209

Soient K un compact de $\mathbb{C}$ <u>de complémentaire connexe</u>
et $a \in K^c$

Alors $\varphi_a : z \in K \longmapsto \frac{1}{z-a}$

est limite uniforme de polynômes

---

(1) Notant $\mathcal{P}$ ~~l~~'ensemble des fonctions polynomiales sur K, $\mathcal{P}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ et son adhérence $\overline{\mathcal{P}}$ aussi
(par continuité de $+$ et $\times$)

Notons $A := \{ a \in K^c \mid \varphi_a \in \overline{\mathcal{P}} \} = \{a \mapsto \varphi_a\}^{-1}($

<u>But :</u> Mq $A = K^c$ par connexité

(a) $A \neq \emptyset$

- K compact $\Rightarrow K \subset \overline{B(0,R)}$ $\quad R = \sup_K |z|$

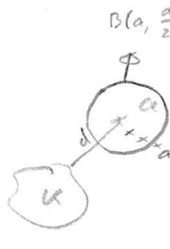
- Soit $a \in \overline{B(0,R)}^c \subset K^c$: $|a| > R > |z| \quad \forall z \in K$

Alors $\varphi_a(z) = \frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - z/a} = \underbrace{-\frac{1}{a} \sum \left(\frac{z}{a}\right)^n}_{}$ $\boxed{CN}$ sur $\overline{B(0,R)} \supset K$

donc $\varphi_a = \lim_{\substack{\|\cdot\|_\infty \\ N \to +\infty}} \underbrace{\left(-\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z}{a}\right)^n \right)}_{\in \mathcal{P}} \in \overline{\mathcal{P}}$

donc $a \in A$.

(b) A est fermée <u>dans K^c</u>



- Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $a \in K^c$
$d := d(a, K) > 0$

Alors $\forall z \in K$: $|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| = \left| \frac{a_n - a}{(z-a_n)(z-a)} \right|$

on veut majorer le dén. : APCR : $|a_n - a| \leq \frac{d}{2}$ donc $|z - a_n| \geq \frac{d}{2}$

donc $|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| \leq \frac{|a_n - a|}{d/2 \times d} = \frac{2}{d^2} |a_n - a|$

donc APCR $\|\varphi_{a_n}^{\in \overline{\mathcal{P}}} - \varphi_a\|_\infty \leqslant \frac{2}{d^2} |a_n - a| \longrightarrow 0$

donc $\varphi_a \in \overline{\overline{\mathcal{P}}} = \overline{\mathcal{P}}$ et $a \in A$

(on a montré la continuité (séq) de $a \in K^c \mapsto \varphi_a$)

(3) A est ouvert dans K^c

Reprenons $a \in A$ et $d := d(a, K)$ Mq $\overline{D(a, \frac{d}{2})} \subset A$

et $|h| \leqslant \frac{d}{2}$

$$\varphi_{a+h}(z) = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{h}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{h}{z-a}\right)^n$$

$$= \underbrace{\sum \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}}_{\boxed{CN} \text{ pour } z \in K}$$

car $\frac{|h|^n}{|z-a|^{n+1}} \leqslant \frac{1}{d\, 2^n} \longrightarrow$ {terme + de série CV, ind. de z

donc $\varphi_{a+h} = \lim_{\|\cdot\|_\infty, N} \left(\sum_{n=0}^{N} h^n \varphi_a^{n+1}\right) \in \overline{\mathcal{P}}$

donc $a + h \in A$, $\overline{D(a, d/2)} \subset A$

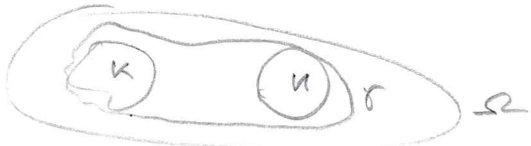
et A est ouvert (dans K^c)

A ouvert, fermé et non vide : c'est une cc de K^c non vide

donc $A = K^c$

Runge fort :

Toute fonction holomorphe au voisinage de K est dans $\overline{\mathcal{P}}$



$\exists \gamma \subset \Omega \setminus K$, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(w)}{w - z} dw$